Puzzles with my grandchildren

No-Face Book,
No-Filter Bubble,
No-Group Think:

Just Think

Dr.l.noordzij@leennoordzij.nl

De Puzzels:

- Verdeling met 3 vaten
- De roeiboot en de hoed
- Driehoeken in een veelhoek
- De baksteen en de opwaartse kracht
- Vermenigvuldigen en kwadrateren
- Maximaal oppervlak bij een gegeven omtrek
- Mengen
- De drenkeling
- De broekriem
- Gemiddelde snelheid
- De weegschaal
- Het verjaardag probleem
- Traject controle
- Ga je wel naar school?
- Een verdelingsprobleem
- De egel, de jakhals, de giraffe, de leeuw en de papegaai
- Bepaling van een stof door middel van de meting van de soortelijke warmte
- El Greco
- We are family
- The disappearance of an imaginary number
- Creativity
- 1089
- Driedeling van de hoek

Inhoudsopgave

Three containers and a distribution problem:

- 1 container of 8 litre.
- 1 container of 5 litre.
- 1 container of 3litre.

The container of 8 litre is filled with a liquid , water, say. You can only use the given three containers. The containers can be completely filled or empty. There are no marks on the containers.

We zitten in een roeiboot:

De rivier stroomt met een snelheid van 3 kilometer per uur. Je roeit met een snelheid van 4 kilometer per uur stroomopwaarts. Plotseling valt je pet in het water. 45 Minuten later mis je de pet.

Opgave: Hoe lang duurt het terug roeien, voordat je de (drijvende) pet weer uit het water kan vissen?
Bij het antwoord heb ik nog een ander voorbeeld uitgewerkt, naar aan leiding van een discussie met mijn kleindochter.

Hoeveel driehoeken passen in een veelhoek:

Opgave: hoeveel driehoeken passen er in een veelhoek? Voorwaarde is dat de driehoek de hoekpunten gemeenschappelijk heeft met de veelhoek.

De baksteen:

We hebben een baksteen, een bak gevuld met water(niet helemaal vol) en een plastic bakje dat in de bak met water kan drijven. In het bakje past de baksteen.
We gooien de baksteen in de bak met water en de baksteen zinkt als een echte baksteen. Het water in de bak is een bepaalde hoogte gestegen. We halen de baksteen weer uit het water, laten het plastic bootje in het water drijven en plaatsen de baksteen in het bootje. Het bootje en de baksteen blijven drijven. Ook nu stijgt het water in de bak over een zekere hoogte. Vraag: is het water in de bak met het bootje en de baksteen in het bootje meer of minder gestegen dan in het geval dat de baksteen op de bodem van de bak met water ligt?

Opm: het gewicht van het plastic bootje mag worden verwaarloosd.

Vermenigvuldigen/kwadrateren:

- Wat is een handige methode om bijvoorbeeld 57*57 uit te rekenen?
- Wat is een handige methode om bijvoorbeeld 45*45 uit te rekenen?

Bepaal het maximale oppervlak bij een gegeven omtrek.

Gegeven de lengte L van de omtrek van een geometrische figuur. Vlakke meetkunde.
Bij welk figuur verkrijgen we met L de maximale oppervlakte?
Druk deze oppervlakte uit in L. Probeer maar met een gelijkzijdige driehoek, een vierkant en een cirkel. Alle met een omtrek L.
Hoe ontstaat een dergelijk vraagstuk?

Mengen.

Je moet een mengsel maken van twee vloeistoffen in een verhouding van 1:4. Je hebt slechts een fles met een inhoud van 750 ml ter beschikking voor het mengsel. Op de fles staat geen maatverdeling. Je weet dus alleen dat in de fles 750 ml past. Wel heb je de beschikking over een kannetje met de inhoud van 50 ml. Wat is de snelste methode om het mengsel te maken?

De drenkeling.

Je loopt op het strand en plotseling hoor je iemand om hulp roepen. Er ligt iemand in het water. Je ziet de drenkeling en vraagt je af hoe kom ik zo snel mogelijk bij de drenkeling. Je kan natuurlijk zwemmen. De drenkeling ligt even ver van de kust verwijderd als jij van de waterkant bent. De denkbeeldige lijn tussen jouw en de drenkeling maakt bijvoorbeeld een hoek van 45 graden met de waterlijn. Wat is de kortste tijd om bij de drenkeling te komen.

Inkorten van een riem.

Je hebt een mooie riem gekocht. De riem zit niet strak genoeg. De riem kan ingekort worden bij gesp. Daar kies je voor. Moet er een gaatje bij gemaakt worden?

Gemiddelde snelheid.

Je vertrekt van huis en moet 30 km rijden. Je doet dat met een gemiddelde snelheid av 20 km/uur. Maar je moet ook weer terug, hebt geen last meer van files en de gemiddelde snelheid waarmee je naar huis rijdt is 60 km/uur. Wat is de gemiddelde snelheid van de heen-en terugreis samen?

Wegen.

Ook bekend als Bachet's probleem.
Als je iets wil wegen met een gewicht van 1 kilogram, 10 kilogram tot 40 kilogram en wel van 1 tot 40 in stappen van een hele kilogram, hoe doe je dat? De weegschaal is een balans weegschaal met contragewichten. Wat is het minimum aantal gewichten dat je nodig hebt?

Het verjaardag probleem.

Je zit in een ruimte met 23 andere personen, die niet bij elkaar horen. Durf je te beweren dat de kans groter is dan 50% dat er twee mensen in die ruimte zijn die op dezelfde dag jarig zijn?

Traject controle.

Waarom zou ten behoeve van snelheidscontroles de trajectcontrole zijn in gevoerd?

Ga je wel naar school?

Een oude bekende uit "How to lie with statisics".
We beginnen met een jaar heeft 365 dagen. Waarvan je re 122 aftrekt voor de 1/3 van de tijd die je in bed doorbrengt. Dan trek je er nog eens 45 dagen vanaf voor de drie uur per dag die je gebruikt om te eten. Van de resterende 198 trek je nog eens 90 af vanwege de zoemervakantie(misschien wat lang). Ook trek je nog eens 21 dagen af voor de Kerst en de Paas vakantie. De dagen die overblijven zijn niet genoeg voor de zaterdagen en de zondagen. Hoe kan dat nu?

Een verdelingsprobleem.

Even snel: een tafeltennis bat en een balletje kosten samen €1,10 . De bat kost €1 meer dan het balletje kost. Hoeveel kost elk?

De egel, de jakhals, de giraffe, de leeuw en de papegaai.

Een slimme egel kwam in de mist vier dieren tegen, staand in een rij achter elkaar. De jakhals die altijd liegt, de leeuw die de waarheid spreekt, de papegaai die het laatste antwoord herhaalt (als hij als eerste is, zegt hij willekeurig 'ja' of 'nee') en de slome giraffe die eerlijk antwoord geeft op de vorige vraag (en de eerste keer zegt hij willekeurig 'ja' of 'nee').
De egel wil uitzoeken wie waar staat en vraagt hen eerst één voor één: 'Ben jij de jakhals?'. Daarna weet ze alleen waar de giraffe staat. Dan vraagt ze de dieren in dezelfde volgorde "Ben jij de giraffe?' en ontdekt waar de jakhals staat. De egel weet nog niet de complete volgorde en vraagt aan het eerste dier: "Ben jij de papegaai?'. Zodra dit dier 'ja' zegt weet de egel precies wie waar staat. Weet jij het ook?
Bron: De Volkskrant, Column:'Ionica zag een getal', Sir Edmund/20 juni 2015.

Bepaling van een stof door middel van de meting van de soortelijke warmte.

Je hebt een blokje van een bepaalde stof: om wat voor stof gaat het?
Door middel van meten met een calorimeter kan je de soortelijke warmte bepalen.
Tot je beschikking staat een calorimeter, een thermometer, het warmte element van de calorimeter en een maatbeker.
Het gaat erom om de soort stof te bepalen met zo min mogelijk meetfouten.
Het gewicht van de onbekende stof is bekend.
Aangenomen mar worden dat het volume van de onbekende stof zeer klein is vergeleken met de inhoud van de calorimeter.

El Greco.

The artist El Greco had a reputation for painting his figures especially long and thin. It's suggested that the reason for this is that he had a defect in his vision, which made everything appear stretched in the vertical direction. Do you think that is a plausible theory?
Brief Candle in the Dark: my Life in Science, New Recruits, Dawkins, R. HarperCollins 2015.

We are family.

How many grandparents do you have?
And how many great-grandparents?
And how many great-great-grand parents?
Right then, how many ancestors do you think you had two thousand years ago, in the time of Christ?
Brief Candle in the Dark: my Life in Science, New Recruits, Dawkins.

The disappearance of an imaginary number.

The solutions of the cubic equation.
We have $x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = 0$.
You see at once $(x+1)^3 + 8 = 0$.
Hence $(x+1)^3 = -8$ and $x = -3$.
You know you miss a pair of complex conjugate roots.
How come?

Creativity.

$IV = III + III$.
Move a single line to make the above statement true.
$III = III + III$.
Once more: move a single line to make the statement true
Lehrer, J., *Imagine How Creativity Works*, Hougthton Mifflin Harcourt, 2012.

1089

In many publications you can find the puzzle 1089.
What is this all about?
Well, take a number with 3 digits. Denote the digits by a, b and c. So the number reads abc. Reverse a and c. Then we have a new 3 digit number cba. Assuming $cba < abc$ substract cba from abc . You will find a new number. Denote this number by def. Again, reverse def into fed. Add def and fed. The result of this summation is always 1089.
Can you proof this and are there any constraints or conditions?

Driedeling van de hoek.

Constructie met passer en liniaal zonder merkteken.
welke hoeken kun je zoal in drieën delen?
“To compose or to decompose” , that is the question.

Answers.

3 vaten:

Stap 1: Maak met het vat van 8 liter het vat van 5 liter vol. Giet daarna met het vat van 5 liter het vat van 3 liter vol. Giet daarna het vat van 3 liter weer leeg in het vat van 8 liter.
Resultaat: het 8-liter vat bevat 6 liter water. Het 5-liter vat bevat 2 liter water. Het 3- liter vat is leeg.

Stap 2: Giet het 5-liter vat leeg in het 3-liter vat.
Resultaat: het 8-liter vat bevat nog steeds 6 liter water. Het 5-liter vat is nu leeg. Het 3-liter vat bevat nu 2liter water.

Stap 3: Giet met het 8-liter vat het 5-liter vat vo. Giet met het 5-liter vat het 3-liter vat vol.
Resultaat: Het 8-liter vat bevat nu 1 liter water. Het 5-liter vat bevat nu 4 liter water. Het 3-liter vat bevat nu 3 liter water.

Stap 4: Giet nu het 3-liter vat leeg in het 8-liter vat.

Resultaat en oplossing: Het 8-liter vat bevat 4 liter water. Het 5-liter vat bevat 4 liter water.

We zitten in een roeiboot.

Resultaat: toch even lastig omdat eerst een verkeerd referentie kader wordt gekozen. (James Gleick, *Genius, the life and science of Richard Feynman*, Open Road, New York). Maar nu even anders met meer informatie, maar wel dezelfde natuurkunde. Dezelfde rivier. We laten in de rivier twee boeien met de stroom meedrijven. Zeg: op een afstand van 100 m. van elkaar. De boeien blijven op dezelfde afstand van elkaar met de stroom meedrijven. Nu brengen we met een drone een zwemmer precies tussen de twee boeien, op gelijke afstand van beide boeien (50 m.) in het water. Kost het de zwemmer meer moeite om naar de boei stroomopwaarts te zwemmen dan naar de boei stroomafwaarts? Nu kan het zomaar gebeuren dat je jezelf door de vraagstelling opstelt als een waarnemer op de oever. De woorden stroomopwaarts en stroomafwaarts zijn daar zeker aanleiding toe Helaas, dan gaat het fout. Je dient je in de situatie van de zwemmer te verplaatsen en de oever te vergeten. De oever speelt voor de zwemmer geen enkele rol. Naar welke boei de zwemmer ook zwemt, het maakt geen enkel verschil. Begin maar met de situatie dat de zwemmer niets doet. Beide boeien blijven op 50 m. afstand van de zwemmer. Relativiteitstheorie te beginnen met Galilei.
Deze uitwerking is mede het resultaat van een discussie met mijn kleinkinderen

Hoeveel driehoeken passen in een veelhoek:

Stap 1: door intekenen in een vierhoek of vijfhoek wordt het antwoord snel gevonden. Hoe handig gaat dit nog bij een negenhoek?

Stap 2: Handiger is om de formule vorm te kiezen. We stellen dat voor de driehoek (ook een veelhoek) geldt dat er 0(nul) driehoeken in getekend kunnen worden.
Het aantal driehoeken wordt: $n(n-3)$, waarbij n het aantal hoekpunten is van de veelhoek. Of in de vorm van een recurrente betrekking: het aantal driehoeken in de veelhoek met het aantal hoekpunten $n+1$ is

$$n(n-3)+2(n-1),$$

waarbij n het aantal hoeken van de veelhoek is met een aantal van n hoeken.
Boven staande formule vindt je door $n+1$ te substitueren in de formule $n(n-3)$:

$$(n+1)(n+1-3) \to (n-2)(n+1) \to n^2-n-2 \to n^2-3n+2n-2 \to n(n-3)+2(n-1).$$

Nb.: het aantal driehoeken is het dubbele van het aantal diagonalen van een veelhoek.

De baksteen:

De wet van Archimedes.

Vermenigvuldigen/kwadrateren:

- 57*57. “1) Splits het getal in T(ientallen) en E(enheden): 5 en 7; en bereken van beide het kwadraat: 24/49. 2) Verdubbel één der beide cijfers (T of E, naar keuze!) en vermenigvuldig dit verdubbelde cijfer met het andere cijfer van het getal: 10*7 of 14×5, m.a.w. bereken het tweevoud van het product der cijfers van het getal.3) Tel het tienvoud van dit product bij de naast elkaar geschreven kwadraten der afzonderlijke cijfers op: 3249……….. De methode berust op de bekende formule: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. “ Einde citaat van A. P. van Leeuwen, *VOLGENS BARTJENS rekenkunstige vermakelijkheden en leerzame gevallen met getallen,* 1945, H. J. W. Becht – Uitgever- Amsterdam.

- 45*45. Dit kwadraat kan op dezelfde wijze berekend worden als bovenstaand. Maar het kan ook anders. VOLGENS BARTJENS “……………….als we het kwadraat van een getal, dat op 5 eindigt, moeten uitrekenen: dan behoeven we slechts 25 te plaatsen achter een getal, dat we verkrijgen door de tientallen te vermenigvuldigen met een getal, dat 1 meer is. Bijvoorbeeld:
  $45^2 = 2025, [4 \times (4+1) = 4 \times 5 = 20]$". Einde citaat.
  Maar voor dit kwadraat geldt ook een algemene formule en wel:$(a+b)(a-b) + b^2$, waarbij $a = 45$ en $b = 5$. Dus 50×40 + 25.
  Is er ook zoiets voor bijvoorbeeld voor 54×54? Helaas, als je zo nemen $60 \times 50 + 4 \times 4 = 3016$ zit je er naast!
  Wat te doen? Kies een mooi getal dichtbij 54. Dat kan zijn 60 of 50. De volgende stap is: $(54+6)(54-6) + 6 \times 6$ of $(54+4)(54-4) + 4 \times 4$ geeft voor beide 2916. Je ziet al dat 50 de handigste keuze is: 100/2.
  Deze uitwerking kwam mede tot stand na een discussie met mijn kleinkinderen.

Bepaal het maximale oppervlak bij een gegeven omtrek L.

Dit is nog niet zo eenvoudig te bewijzen.
Begin daarom eerst maar het vierkant, de gelijkzijdige driehoek en de cirkel – alle met de gegeven omtrek L – met elkaar te vergelijken. Dat is al een mooi begin. Nu blijkt dat de cirkel het grootste oppervlak geeft bij een gegeven L. Dat de cirkel het grootste oppervlak heeft, zal Archimedes vast al eens bewezen met zijn methode van de zwaartepunten.
Het vraagstuk is ontstaan uit het onmeetbare getal π. Is de omtrek van een cirkel een geheel getal, dan is de straal van deze cirkel een onmeetbaar getal. Zo ontstond de vraag: bij een gegeven omtrek het maximale oppervlak te zoeken. Maar een veel leukere vraag is: gegeven een hoeveelheid stenen, wat is het grootste fort wat ermee gebouwd kan worden? In “The Grand Strategy Of The Roman Empire” geschreven door E. N. Luttwak valt er het volgende over te lezen: ‘….A second clear-cut difference is the ground plans of late Roman fortifications. Old-style rectangles with rounded ditch defenses naturally persisted, since in many cases old fortifications remained in use, but the square layout became predominant, together with irregular quadrilaterals (Yverdon), rough circles (Jünkerath) and bell-shapes-where the broaderside rested on a river or the sea (Koblenz, Altenburg, Solothurn, Altrip). The advantage of proximate circles and proximate squares over the older rectangular pattern is, as noted before, the shorter length of the wall for any given internal area. The

perfect circle-theoretically optimal-was normally avoided because it was difficult to build…..'. E. N. Luttwak, *"The Grand Strategy Of The Roman Empire. From the First Century A.D. to the Third",* The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1979.

Mengen.

De fles zover mogelijk vullen met de vloeistof waar het meeste van nodig is. Dan aanvullen met 3 maal een kannetje van 50 ml met de andere vloeistof en de fles afvullen met de vloeistof waar het meeste van nodig is.

De drenkeling.

Een formule maken kan, maar een logische redenering is ook prima.

Inkorten van een riem.

Je wist het al, er behoeft geen gaatje gemaakt te worden.

De gemiddelde snelheid.

Let op. 40 of 30 km/uur? Eenvoudig twee gemiddelde snelheden optellen en delen door 2? Natuurlijk niet.

Wegen.

4 contragewichten. Je zou eerder denken: 6. En wel 1, 2, 4, 8, 16 en 32. Maar het kan met minder: 1, 3, 9 en 27.

Het verjaardag probleem.

Kies een willekeurig persoon. We stellen dat een jaar 365 dagen heeft.(Je mag het natuurlijk ook voor een schrikkeljaar uitzoeken.) De kans dat een ander dan die persoon op die dag jarig is , is 1/365. De kans dat het niet zo is, is 1-(1/365). De totale kans is namelijk altijd 1. De kans dat een derde willekeurig gekozen persoon op dezelfde dag jarig is als één van de ander twee is 2/365, dus de kans dat deze persoon niet op dezelfde dag jarig is als één van de andere twee is 1-(2/265)=363/365. De kans dat dat geen van deze drie dezelfde verjaardag hebben is (364/365)*(363/365)=0,9918. Enzovoort. Je vindt bij 23 mensen dat de kans 0,4927 of wel iets meer dan 49% is dat deze mensen niet op dezelfde dag jarig zijn. Ergo, de

kans iets groter dan 50% dat er twee mensen op dezelfde dag jarig zijn.
(Crilly, C., *50 Mathematics ideas you really need to know*, Quercus Publishing, 2008)

Traject controle.

Bij snelheidscontroles gebeurt het vaak dat voor er geflitst wordt, er wordt afgeremd. Dan wordt net aan de maximum snelheid voldaan. Flitst men een kilometer later weer dan kan het zelfde proces worden gevolgd. Echter, de tijd wordt gemeten tussen de twee flitsen en dan blijkt vaak dat er zelfs over die ene kilometer te hard wordt gereden.
Afstand gedeeld door de tijd geeft het resultaat. Wiskundig wordt dit ook de middelwaarde stelling genoemd.

Ga je wel naar school?

Tja. Dat vraagt niet veel uitleg wel? Er zitten nogal wat dubbeltellingen in. Je hebt ze zo gevonden.

Een verdelingsprobleem.

Je denkt, het balletje kost 10 eurocent en de bat €1. Helaas, op deze wijze kost de bat €1,10. Dus het moet anders. Algebra helpt altijd.

De egel, de jakhals, de giraffe, de leeuw en de papegaai.

Op de vraag ‘Ben jij de jakhals?’ zullen zowel de liegende jakhals als de eerlijke leeuw ‘nee’ antwoorden. Wat de giraffe en de papegaai zeggen, hebben we niet veel aan bij deze eerste vraag. Maar omdat de egel na deze eerste vraag weet waar de giraffe staat, moet hij zich verraden door ‘ja’ te zeggen nadat iemand anders ‘nee’ heeft gezegd. We weten hierdoor dat de giraffe niet vooraan kan staan.
Op de vraag ‘Ben jij de giraffe?’ zal de liegende jakhals ‘ja’ antwoorden. De leeuw zegt ‘nee’ en de giraffe ook, want die zit denkt nog aan de vorige vraag. De papegaai herhaalt deze ronde het antwoord dat hij als laatste hoorde. Na alle vier de antwoorden weet de egel de plek van de jakhals.
Op de vraag “Ben jij de papegaai?’ zal de leeuw ontkennend antwoorden, dus hij kan niet op de eerste plek staan. Zowel de giraffe als de jakhals zullen ‘ja’ zeggen. Maar de egel krijgt extra informatie van het antwoord van het eerste dier terwijl ze al weet waar de jakhals staat. Dus kan ook de jakhals niet vooraan staan.
We wisten van de eerste vraag dat de giraffe niet vooraan staat, dus moet de papegaai vooraan staan. Omdat de papegaai op de derde vraag ‘ja’ zegt, moet er op de laatste plek een dier staan dat bij de tweede vraag ‘ja’ antwoordde. Dat kan alleen de jakhals zijn.
Er zijn nu nog twee mogelijke volgordes: papegaai-giraffe-leeuw-jakhals of papegaai-leeuw-

giraffe-jakhals. Om te bedenken wat de juiste volgorde is, moeten we als de egel denken; een lastige stap. Stel eens dat de leeuw op de derde plek staat, dan moet de egel op de eerste vraag ‘nee-ja-nee-nee’ gehoord hebben. Zodra zij weet waar de giraffe en de jakhals staan, zou ze kunnen beredeneren dat de leeuw op de derde plek moet staan (want hij praatte het eerste antwoord niet na bij de eerste vraag). Dan zou ze dus helemaal geen derde vraag nodig hebben. Om dat ze die wel stelt, is de enige juiste volgorde papegaai-leeuw-giraffe-jakhals.

Bepaling van een stof door middel van de meting van de soortelijke warmte.

De meting wordt twee keer uitgevoerd: 1 keer zonder de onbekende stof en alleen met water en 1 keer met de onbekende stof met water.
Zorg dat in beide gevallen de hoeveelheid water gelijk is en de calorimeter nagenoeg vol is.
Ook wordt in beide gevallen de calorimeter met eenzelfde temperatuur verschil ΔT° opgewarmd. De tijd dat het warmte element is ingeschakeld noem ik voor het eerste geval Δt_1 en voor het tweede geval Δt_2. De door het warmte element op genomen energie uit het elektriciteitsnet is $W_{1,2} = VA \times \Delta t_{1,2}$. (Nota bene: $VA = Volt \times Ampère$).
De soortelijke warmte van de onbekende stof x, s_x:
$s_x = \frac{W_2 - W_1}{gewicht_x \times \Delta T^\circ} = \frac{VA(\Delta t_2 - \Delta t_1)}{gewicht_x \times \Delta T^\circ}$.
Nadat de soortelijke warmte is vastgesteld, volgt een fouten analyse.
Een interessante fout is: een groot getal, bijvoorbeeld VA, vermenigvuldigd met een kleine meetfout van de tijd $\Delta t_{1,2}$.

El Greco.

Dawkins: Some students immediately got it, ………..: ‘No, it’s a bad theory because when he looked at his own paintings they would be even *more* stretched.’ …….

We are family.

You cannot go on doubling. It goes as 2^n.
Think on the famous story of the grain of corns and the chess-board.

The disappearance of an imaginary number.

Given $x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = 0$, you already know $x = -3$ to be a root.
With the expansion $(x+1)^3 + 8 = 0$ there is no way to find out about the complex conjugate roots.
What about the expansion $x^2(x+3) + 3(x+3) = 0$?
Well, then you have $(x^2+3)(x+3) = 0$.
Of course not knowing about complex numbers $(x^2+3) \neq 0$ and the only root is given by $x + 3 = 0$. However, excepting complex numbers (x^2+3) can be zero and consequently $x = \pm i\sqrt{3}$ where $i = \sqrt{-1}$.
So consider x to be an imaginary number and $z = x + 1$ a complex number, we can write $(z)^3 + 8 = 0$ or $(z)^3 = -8$.

Now substitute $z = a + ib$. With a and b real numbers $a, b \in \mathbb{R}$. Then you will find $a = -2, b = 0; a = 1, b = \sqrt{3}$ and $a = 1, b = -\sqrt{3}$.

Creativity.

$IV = III + III$.
This a simple one: $VI = III + III$. The line is moved to the right.
$III = III + III$.
This one is less obvious:
$III = III = III$. Rotate the vertical line in the plus($+$).

1089.

The proof.
We start with:

1. $abc > cba$. Then $a > c$.
   In abc, a represents a- hundreds, b-tens and c-units. For cba it is the other way around.
   Now $abc - cba = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a - c)$.
   So far we implied no constraint except for $abc > cba$.
   With $a > c$ we can have $a \geq c + 1$.
   What about $a = c + 1$? Then we have $abc - cba = 99(a - c) = 99$. A two digit number.
   we could repair this by allowing 099. However, we leave that option out. So we have as a new constraint $a \geq c + 2$. Furthermore with $c > 0$, $3 \leq a \leq 9$.
   With these constraints we continue with the new number $def = 99(a - c)$.
   We set $a - c = n$. So $99(a - c) = 99n = (n - 1)100 + 90 + 10 - n = def$.
   Hence $d = n - 1$, $e = 9$ and $f = 10 - n$.
   Take notice of $d + f = 9$ and $e = 9$.
   What do we obtain for $def + fed$?
   $100d + 100f = 100(d + f) = 900$,
   $10e + 10e = 20.9 = 180$,
   and
   $f + d = 9$.
   Hence $100(d + f) + 20e + f + d = 1089$.
2. $abc < cba$. So $a < c$.
   You can imagine the analysis being similar and we again find 1089.

Driedeling van de hoek.

Constructie met de passer en liniaal zonder merktekens.
nl.Wikipedia.org .
Een hoek van 180° kun je in drieën delen met behulp van de passer en een liniaal. Teken twee gelijkzijdige driehoeken met de basis op een gemeenschappelijke lijn en een gemeenschappelijk hoekpunt.
Een hoek van 135° kun je in drieën delen met behulp van de passer en een liniaal. Een

rechthoekige driehoek met een hoek van $30°$ en een hoek van $60°$ kun je eveneens construeren met passer en liniaal. Met behulp van deze driehoek kun je links en rechts van de loodlijn op de hiervoor genoemde gemeenschappelijke lijn een hoek van $45°$ construeren. Je hebt dan een hoek van $135°$ waarvan al één hoek van $45°$ ter beschikking is. De resterende hoek van $90°$ deel je met de standaard methode in tweeën met als gevolg dat je de hoek van $135°$ in drieën hebt gedeeld.
Ga je internet op dan zal je ook constructies vinden afgeleid van de methode van Archimedes. Een daarvan geldt niet(www.davdata.nl), want er worden merkstreepjes op de liniaal aangebracht. Well, basically this is about decomposition of an angle into three equal angles.
Maar het is niet nodig om merkstreepjes aan te brengen. However, this about compostion of an angle by three equal angles.
Teken een cirkel met straal R. Het middelpunt kan je tekenen met de niet gemarkeerde liniaal door eerst een kruisje op het papier te tekenen en dat als middelpunt van de cirkel te gebruiken. Of construeer met de passer ingesteld op de straal R van de zojuist getekende cirkel het middelpunt. We noemen dit middelpunt M
Trek met de liniaal een willekeurige lijn door het punt M van de cirkel. Kies een willekeurig punt op de cirkel linksboven deze willekeurige lijn. Dit punt noemen we A. Teken met de passer met als middelpunt het punt A een cirkel met de straal R. Nota Bene: de passer staat daar nog steeds op ingesteld. De laatst getekende cirkel snijdt de willekeurige lijn, buiten de eerste cirkel in het punt B. Trek nu met de ongemerkte liniaal een lijn door B en A. Deze lijn snijdt de cirkel in het punt C. Opgelet: kies daarom A niet te ver van de getrokken middellijn.
De hoek ABM, α, is 1/3 van de hoek β gevormd door de straal MC met de middellijn.
Hoek CAM $= 2\alpha$ evenals hoek ACM.
De hoek AMC: $\delta = 180° - 4\alpha$
en $\delta = 180° - \alpha - \beta$.
$\rightarrow \alpha = \frac{1}{3}\beta$.
Een constructie met passer en ongemerkte liniaal.
Maar! De hoek β is in drieën verdeeld door de hoek α buiten de hoek β te construeren, terwijl je β nog niet kent. Met de geconstrueerde α wordt β geconstrueerd. Daarna wordt vastgesteld dat $\alpha = \frac{1}{3}\beta$. Een soort compositie. Terwijl de bedoeling is: decompositie.
De compositie kan veel sneller.
Teken een hoek α. Uiteraard met alleen de liniaal. Teken een cirkel met staal R met het hoekpunt als middelpunt. Teken opnieuw deze cirkel ergens naast de getekende hoek α. Meet nu met de passer de hoek α op langs de getekende cirkel en zet de opgemeten hoek 3 keer achter elkaar af langs de andere cirkelboog. Ziedaar: de drievoudige hoek is gecomponeerd. Alas a composition instead of a decomposition.

More details on the decomposition of an angle into three equal angles can be found in :

Incompleteness, Uncertainty and Archimedes 'Lever, www.leennoordzij.me .